Całka nieoznaczona - całkowanie przez części

Twierdzenie. Jeżeli funkcje u i v mają na pewnym przedziale X ciągłe pochodne, to

(18) $$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx\,.$$

Pewnym problemem – na wstępnym etapie nauki całkowania – jest rozpoznanie całek, do których należy zastosować powyższy wzór (wzór na całkowanie przez części). Widzimy, że podobnie, jak we wzorze na całkowanie przez podstawienie, również i tu funkcja podcałkowa jest iloczynem dwóch funkcji. W uproszczeniu można powiedzieć, że całkujemy przez części, gdy potrafimy znaleźć funkcję pierwotną jednego z dwóch czynników funkcji podcałkowej oraz gdy obliczenie całki po prawej stronie znaku równości we wzorze (18) jest łatwiejsze od obliczenia wyjściowej całki. Dodatkowo, wiedząc już, że daną całkę obliczamy całkując przez części, musimy zdecydować, którą z funkcji tego iloczynu przyjmujemy za funkcję u, a którą za v'. Aby ułatwić Czytelnikowi to zadanie poniżej wyszczególnione zostaną trzy ważne grupy całek, które obliczamy całkując przez części, z jednoczesnym określeniem odpowiedniego przyporządkowania:

I. $\int x^n \sin(ax+b)dx$, $\int x^n \cos(ax+b)dx$, $\int x^n \mathrm{e}^{ax+b}dx$, ($a$, b, n – stałe, n – liczba naturalna) – w tym przypadku przyjmujemy: $u(x) = x^n$.

II. $\int x^r \ln^n x dx$ ($r \neq -1$), $\int x^n \arcsin x dx$, $\int x^n \arccos x dx$, $\int x^n \mathrm{arctg}\, x dx$, $\int x^n \mathrm{arcctg}\, x dx$ (r, n – stałe, n – liczba naturalna) – w tego typu całkach przyjmujemy: $v'(x) = x^r$ (dla całek z logarytmem) lub $v'(x) = x^n$ (dla pozostałych całek).

III. $\int \mathrm{e}^{ax+b} \sin(cx+d)dx$, $\int \mathrm{e}^{ax+b} \cos(cx+d)dx$ (a, b, c, d – stałe) – w tym przypadku nie ma znaczenia, którą z funkcji przyjmiemy za u, a którą za v'. Tego typu całki obliczamy całkując dwukrotnie przez części, a następnie, przyjmując szukaną całkę za niewiadomą, rozwiązujemy otrzymane równanie.

Przykład. Obliczyć całki:

a) $\int x\sin(3x-1)dx$, b) $\int x^2 \cos x\, dx$, c) $\int x^3 \mathrm{e}^{-2x}\, dx$

d) $\int \sqrt{x} \ln x\, dx$, e) $\int \frac{\ln x}{x^4} dx$, f) $\int \ln^2 x\, dx$,

g) $\int x \mathrm{arcctg}\, x dx$, h) $\int \arccos x dx$, i) $\int \mathrm{e}^{3x} \sin x dx$.

Rozwiązanie.

a) W tym przykładzie oprócz wzoru (18) na całkowanie przez części wykorzystamy również poznany wcześniej wzór (15) i (16). Zauważmy dodatkowo, że funkcję v otrzymamy całkując funkcję v'.

$$\int x\sin(3x-1)dx = \left| \begin{array}{ll} u(x) = x & v'(x) = \sin(3x-1) \\ u'(x) = 1 & v(x) = -\frac{1}{3}\cos(3x-1) \end{array} \right| = -\frac{1}{3}x\cos(3x-1) + \frac{1}{3}\int \cos(3x-1)dx =$$

$$= -\frac{1}{3}x\cos(3x-1) + \frac{1}{9}\sin(3x-1) + C\,,$$

b) $\int x^2 \cos x\,dx = \begin{vmatrix} u(x)=x^2 & v'(x)=\cos x \\ u'(x)=2x & v(x)=\sin x \end{vmatrix} = x^2\sin x - 2\int x\sin x dx =$

$= \begin{vmatrix} u(x)=x & v'(x)=\sin x \\ u'(x)=1 & v(x)=-\cos x \end{vmatrix} = x^2\sin x - 2\left(-x\cos x + \int \cos x dx\right) =$

$= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$,

c) $\int x^3 \mathrm{e}^{-2x}\,dx = \begin{vmatrix} u(x)=x^3 & v'(x)=\mathrm{e}^{-2x} \\ u'(x)=3x^2 & v(x)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} \end{vmatrix} =$

$= -\frac{1}{2}x^3\mathrm{e}^{-2x} + \frac{3}{2}\int x^2\mathrm{e}^{-2x}\,dx = \begin{vmatrix} u(x)=x^2 & v'(x)=\mathrm{e}^{-2x} \\ u'(x)=2x & v(x)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} \end{vmatrix} =$

$= -\frac{1}{2}x^3\mathrm{e}^{-2x} + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-2x} + \int x\mathrm{e}^{-2x}dx\right) =$

$= -\frac{1}{2}x^3\mathrm{e}^{-2x} - \frac{3}{4}x^2\mathrm{e}^{-2x} + \frac{3}{2}\int x\mathrm{e}^{-2x}dx = \begin{vmatrix} u(x)=x & v'(x)=\mathrm{e}^{-2x} \\ u'(x)=1 & v(x)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} \end{vmatrix} =$

$= -\frac{1}{2}x^3\mathrm{e}^{-2x} - \frac{3}{4}x^2\mathrm{e}^{-2x} + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{-2x}dx\right) =$

$= -\frac{1}{2}x^3\mathrm{e}^{-2x} - \frac{3}{4}x^2\mathrm{e}^{-2x} - \frac{3}{4}x\mathrm{e}^{-2x} + \frac{3}{4}\int \mathrm{e}^{-2x}dx =$

$= -\frac{1}{2}x^3\mathrm{e}^{-2x} - \frac{3}{4}x^2\mathrm{e}^{-2x} - \frac{3}{4}x\mathrm{e}^{-2x} - \frac{3}{8}\mathrm{e}^{-2x} + C =$

$= -\frac{1}{2}\left(x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}\right)\mathrm{e}^{-2x} + C$.

d) $\int \sqrt{x}\ln x\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\ln x\,dx = \begin{vmatrix} u(x)=\ln x & v'(x)=x^{\frac{1}{2}} \\ u'(x)=\frac{1}{x} & v(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \end{vmatrix} =$

$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x - \frac{2}{3}\int \frac{1}{x}\cdot x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\ln x - \frac{2}{3}\int x^{-1}\cdot x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\ \ln x - \frac{2}{3}\int x^{\frac{1}{2}}dx =$

$= \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\ \ln x - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\left(\ln x - \frac{2}{3}\right) + C$,

e) $\int \frac{\ln x}{x^4}dx = \int x^{-4}\ln x\,dx = \begin{vmatrix} u(x)=\ln x & v'(x)=x^{-4} \\ u'(x)=\frac{1}{x} & v(x)=-\frac{1}{3}x^{-3} \end{vmatrix} =$

$= -\frac{1}{3}x^{-3}\ln x + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x}\cdot x^{-3}dx = -\frac{1}{3x^3}\ln x + \frac{1}{3}\int x^{-4}dx =$

$$=-\frac{1}{3x^3}\ln x+\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}x^{-3}\right)+C=-\frac{1}{3x^3}\left(\ln x+\frac{1}{3}\right)+C,$$

f) $$\int \ln^2 x\,dx=\int 1\cdot\ln^2 x\,dx=\begin{vmatrix} u(x)=\ln^2 x & v'(x)=1 \\ u'(x)=2\ln x\cdot\frac{1}{x} & v(x)=x \end{vmatrix}=$$

$$=x\ln^2 x-2\int\frac{\ln x}{x}\cdot xdx=x\ln^2 x-2\int\ln xdx=\begin{vmatrix} u(x)=\ln x & v'(x)=1 \\ u'(x)=\frac{1}{x} & v(x)=x \end{vmatrix}=$$

$$=x\ln^2 x-2\left(x\ln x-\int\frac{1}{x}\cdot xdx\right)=x\ln^2 x-2x\ln x+2\int dx=$$

$$=x\ln^2 x-2x\ln x+2x+C=x\left(\ln^2 x-2\ln x+2\right)+C,$$

g) $$\int x\operatorname{arcctg}x\,dx=\begin{vmatrix} u(x)=\operatorname{arcctg}x & v'(x)=x \\ u'(x)=-\frac{1}{1+x^2} & v(x)=\frac{1}{2}x^2 \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}x^2\operatorname{arcctg}x+\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}x^2\operatorname{arcctg}x+\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx=$$

$$=\frac{1}{2}x^2\operatorname{arcctg}x+\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}x^2\operatorname{arcctg}x+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C,$$

h) $$\int\arccos x\,dx=\begin{vmatrix} u(x)=\arccos x & v'(x)=1 \\ u'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & v(x)=x \end{vmatrix}=x\arccos x+\underbrace{\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx}_{I}.$$

Obliczmy oddzielnie całkę I:

$$I=\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\begin{vmatrix} 1-x^2=t \\ -2xdx=dt \\ xdx=-\frac{1}{2}dt \end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=-\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot 2t^{\frac{1}{2}}+C=-\sqrt{t}+C=-\sqrt{1-x^2}+C,$$

zatem

$$\int\arccos x\,dx=x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C,$$

i) $$\int e^{3x}\sin x\,dx=\begin{vmatrix} u(x)=e^{3x} & v'(x)=\sin x \\ u'(x)=3e^{3x} & v(x)=-\cos x \end{vmatrix}=-e^{3x}\cos x+3\int e^{3x}\cos xdx=$$

$$=\begin{vmatrix} u(x)=e^{3x} & v'(x)=\cos x \\ u'(x)=3e^{3x} & v(x)=\sin x \end{vmatrix}=-e^{3x}\cos x+3\left(e^{3x}\sin x-3\int e^{3x}\sin xdx\right)=$$

$$=-\mathrm{e}^{3x}\cos x+3\mathrm{e}^{3x}\sin x-9\int \mathrm{e}^{3x}\sin x dx .$$

Przenosząc teraz otrzymaną na końcu całkę na lewą stronę równości otrzymujemy

$$10\int \mathrm{e}^{3x}\sin x dx=-\mathrm{e}^{3x}\cos x+3\mathrm{e}^{3x}\sin x ,$$

a stąd ostatecznie

$$\int \mathrm{e}^{3x}\sin x dx=-\frac{1}{10}\mathrm{e}^{3x}\left(\cos x-3\sin x\right)+C .$$

Oczywiście podane powyżej trzy grupy całek nie wyczerpują wszystkich możliwości jeżeli chodzi o całkowanie przez części. Ponadto może się zdarzyć, że do danej całki trzeba będzie zastosować obie podane metody całkowania: całkowania przez podstawienie i przez części.

Przykład. Obliczyć całki:

a) $\int \cos(\ln x)dx$, b) $\int x^3\mathrm{e}^{x^2}dx$, c) $\int x\mathrm{tg}^2 x dx$.

Rozwiązanie.

a) Z całką takiej postaci (jak również całką $\int \sin(\ln x)dx$) postępujemy podobnie, jak z całkami z grupy III – po dwukrotnym całkowaniu przez części w otrzymanym wyrażeniu pojawi się szukana całka. Wystarczy przenieść ją na drugą stronę znaku równości i podzielić otrzymaną równość przez odpowiedni współczynnik.

$$\int \cos(\ln x)dx=\begin{vmatrix} u(x)=\cos(\ln x) & v'(x)=1 \\ u'(x)=-\dfrac{\sin(\ln x)}{x} & v(x)=x \end{vmatrix}=x\cos(\ln x)+\int \sin(\ln x)dx=$$

$$=\begin{vmatrix} u(x)=\sin(\ln x) & v'(x)=1 \\ u'(x)=\dfrac{\cos(\ln x)}{x} & v(x)=x \end{vmatrix}=x\cos(\ln x)+x\sin(\ln x)-\int \cos(\ln x)dx .$$

Stąd

$$2\int \cos(\ln x)dx=x\cos(\ln x)+x\sin(\ln x) \quad /:2 ,$$

$$\int \cos(\ln x)dx=\frac{1}{2}x\left[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)\right]+C .$$

b) $$\int x^3\mathrm{e}^{x^2}dx=\int x^2\mathrm{e}^{x^2}x dx=\begin{vmatrix} x^2=t \\ 2x dx=dt \\ x dx=\dfrac{1}{2}dt \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\int t\mathrm{e}^t dt=$$

$$=\begin{vmatrix} u(t)=t & v'(t)=\mathrm{e}^t \\ u'(t)=1 & v(t)=\mathrm{e}^t \end{vmatrix}=\frac{1}{2}t\mathrm{e}^t-\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^t dt=\frac{1}{2}t\mathrm{e}^t-\frac{1}{2}\mathrm{e}^t+C=$$

$$=\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{x^2}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}+C=\frac{1}{2}\left(x^2-1\right)\mathrm{e}^{x^2}+C .$$

c) Wykonajmy najpierw pewne obliczenia pomocnicze:

$$\int \mathrm{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \mathrm{tg}x - x + C .$$

Przechodząc do szukanej całki otrzymamy

$$\int x\mathrm{tg}^2 x dx = \begin{vmatrix} u(x)=x & v'(x)=\mathrm{tg}^2 x \\ u'(x)=1 & v(x)=\mathrm{tg}x - x \end{vmatrix} = x\mathrm{tg}x - x^2 - \int (\mathrm{tg}x - x)\,dx .$$

Ponieważ

$$\int \mathrm{tg}x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \begin{vmatrix} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \\ \sin x dx = -dt \end{vmatrix} = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C .$$

zatem

$$\int x\mathrm{tg}^2 x dx = x\mathrm{tg}x - x^2 + \ln|\cos x| + \frac{1}{2}x^2 + C = x\mathrm{tg}x - \frac{1}{2}x^2 + \ln|\cos x| + C .$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Znaleźć całki:

44. $\int x\cos x dx$,

45. $\int x\mathrm{e}^x dx$,

46. $\int x^2 \sin 3x dx$,

47. $\int x\cos(3-2x)\,dx$,

48. $\int x\,\mathrm{e}^{5x-1} dx$,

49. $\int x^3 \mathrm{e}^{2x} dx$,

50. $\int x^2 \ln x dx$,

51. $\int \sqrt[3]{x}\, \ln x dx$,

52. $\int \frac{\ln x}{x^4} dx$,

53. $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}} dx$,

54. $\int x \ln^2 x dx$,

55. $\int \ln x\, dx$,

56. $\int x\mathrm{arctg}x\, dx$,

57. $\int \mathrm{arctg}x\, dx$,

58. $\int \arcsin x\, dx$,

59. $\int \mathrm{e}^x \cos x dx$,

60. $\int \mathrm{e}^{-2x} \sin 3x\, dx$,

61. $\int x\,2^x\, dx$,

62. $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$,

63. $\int x\mathrm{e}^x \sin x\, dx$.

42. $\int \frac{x}{(x+3)^5} dx$,

43. $\int \sin x\left(1-\sqrt{\cos x}\right)^2 dx$,

Opracowanie:
dr Igor Kierkosz
dr hab. Volodymyr Sushch